

Einfluß der Nahordnung um Magnesiumverunreinigungen in Metallschmelzen auf die Kernresonanzfluoreszenz-Ausbeute

GÜNTHER HOLTMEYER * und JÜRGEN KALUS

Physik-Department der Technischen Hochschule München

(Z. Naturforsch. 23 a, 1347—1357 [1968]; eingegangen am 6. Juni 1968)

Die relative KRF-Ausbeute am 1,37 MeV-Niveau des Mg^{24} wurde für Mg-Verunreinigungen in den flüssigen Metallen Li, Na, Sr, Sn, Pb, Bi gemessen. Es wurde versucht, Aussagen über die Flüssigkeitsstruktur zu gewinnen. Dazu wurde ein Modell über die Abbremsung beschleunigter Fremdatome in sonst reinen Substanzen entwickelt, das von Hart-Kugel-Stößen ausgeht und den Vielteilchencharakter des Stoßproblems dadurch berücksichtigt, daß eine außerhalb des harten Stoßes erfolgende Abbremsung des stoßenden Teilchens an Potentialschwellen eingeführt wird.

Es ergibt sich ein Zusammenhang zwischen KRF-Ausbeute, Verlagerungsenergie und Nahordnung (Koordinationszahl). Die Ergebnisse weisen darauf hin, daß für Alkalimetalle im Gegensatz zu anderen Metallen eine Verlagerungsenergie im 10 eV-Bereich anzunehmen ist.

Die Möglichkeit, den beim γ -Zerfall entstehenden Kernrückstoßimpuls mit Hilfe unmittelbar vorhergehender Zerfallsreaktionen zu kompensieren, ist, seit CUMMING die Auswirkung solcher Vorgänge auf die KRF (Kernresonanzfluoreszenz) quantitativ formuliert hat¹, dazu herangezogen worden, die Struktur von Festkörpern und Flüssigkeiten zu untersuchen².

Unser Ziel war, Aussagen über die Nahstruktur flüssiger Metalle zu erhalten. Als Emittter der auf ihre Resonanzfähigkeit zu untersuchenden γ -Quanten wählten wir Mg^{24} , das infolge der hohen anfänglichen Rückstoßenergie (168 eV) nach seinem ersten γ -Zerfall (Abb. 1), wegen der günstigen Lebensdauern der an den γ -Zerfällen beteiligten Niveaus und wegen der großen Lebensdauer des Ausgangskernes Na^{24} (15,4 h) gut geeignet ist. Na^{24} und damit auch Mg^{24} betteten wir in Form eines geringfügigen Zusatzes in sonst reine Metallschmelzen ein. Die Messungen beschränkten sich auf relative KRF-Ausbeuten für die verschiedenen Schmelzen.

I. Theoretische Grundlagen

KRF bei γ -Kaskadenzerfällen

Für das von uns durchgeführte KRF-Experiment an Mg^{24} (s. Abb. 1) gilt, daß die (vom 1,37 MeV-

Niveau herrührende) Emissionslinie um

$$\Delta E_R = E_{\gamma 1}^2 / M c^2 \quad (1)$$

($E_{\gamma 1}$ = Anregungsenergie des Niveaus, M = Masse des Mg-Atoms, c = Lichtgeschwindigkeit) unter dem Maximum der KRF-Absorptionslinie liegt, falls der Mg-Kern vor dem 1,37 MeV-Zerfall in Ruhe war.

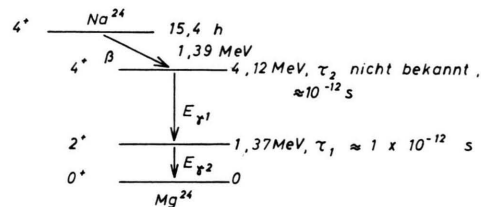


Abb. 1. Wichtigster Teil des Zerfallsschemas von Na^{24} nach³⁻⁵. (In der Abbildung müssen $E_{\gamma 1}$ und $E_{\gamma 2}$ vertauscht werden.)

Das folgt aus Energie- und Impulssatz⁶. Die beiden Linien überlappen sich nicht. Eine Möglichkeit, die Emissionslinie so zu verbreitern, daß Überlappung eintritt, liegt darin, daß der Emittterkern vor der Emission des 1,37 MeV-Quants eine Geschwindigkeit

$$v_{\min} > E_{\gamma 1} / M c \quad (2)$$

besitzt, die er in unserem Fall beim γ -Zerfall des 4,12 MeV-Niveaus erhält. Maßgebend für die Wahrscheinlichkeit eines Resonanzvorganges ist die Größe

* Auszug aus der von der Fakultät für Allgemeine Wissenschaften der Technischen Hochschule München zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Naturwissenschaften genehmigten Dissertation des Dipl.-Phys. GÜNTHER HOLTMEYER (Tag der Promotion: 26. 7. 1967).

¹ J. B. CUMMING, A. SCHWARZSCHILD, A. W. SUNYAR u. N. T. PO-RILE, Phys. Rev. **120** (6), 2128 [1960].

² J. KALUS, Habilitationsschrift, Technische Hochschule München 1967.

³ D. G. ALKHAZOV, A. P. GRINBERG, G. M. GUSINSKII, K. I. EROKHINA u. I. KH. LEMBERG, JETP **8**, 737 [1959].

⁴ S. J. SKORKA, E. EVERS, J. HERTEL, J. MORGENSTERN, T. W. RETZ-SCHMIDT u. H. SCHMIDT, Nucl. Phys. **81**, 370 [1966].

⁵ V. F. WEISSKOPF, Phys. Rev. Lett. **83**, 1073 [1951].

⁶ F. R. METZGER, Progr. Nucl. Phys. **7**, 53 [1959].



der γ -Verteilungsfunktion $N(E) dE$ an der Stelle

$$E_{\gamma_1} = E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2}^2 / (2 M c^2). \quad (3)$$

Für die Zahl der pro Zeiteinheit resonant gestreuten Quanten ergibt sich⁶

$$Z \sim N(E_r) \cdot Q \quad (Q = \text{Quellstärke}). \quad (4)$$

Die Quelltemperatur spielt dabei keine Rolle: Auch bei den höchsten verwendeten Temperaturen ist die rein thermische Verbreitung des Spektrums stets viel kleiner als die Rückstoßverbreiterung.

Berechnung der Funktion $N(E_r)$

Ist die Lebensdauer des zur Resonanz herangezogenen Niveaus (hier $\tau \approx 1 \cdot 10^{-12} \text{ s}$ ^{3, 4, 6}) größer als die mittlere Abbremszeit T' des bewegten Kernes, so enthält $N(E_r)$ Informationen über die von seiner nächsten Umgebung abhängige Abbremsung des Kernes.

Man erhält¹:

$$N(E_r) = c \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} P(v_0) \sum_v \alpha_v \cdot \int_0^T \frac{\exp(-t/\tau) dt}{\tau v_\nu(t, v_0)} dv_0 / \left(2 E_r \int_0^{v_{\max}} P(v_0) dv_0 \right). \quad (5)$$

Hierbei ist $v(t, v_0)$ der zeitliche Geschwindigkeitsverlauf eines Kernes mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 . $P(v_0)$ ist die Verteilung der Anfangsgeschwindigkeiten. Die Definition von T folgt aus $v(T, v_0) = v_{\min}$. Man berücksichtigt verschiedene mögliche Abbremsfunktionen bei konstantem v_0 durch die Einführung von Verteilungskoeffizienten α_v ($\sum_v \alpha_v = 1$).

Unter der nach verschiedenen Untersuchungen⁷⁻⁹ als erfüllt anzusehenden Voraussetzung, daß das Atom seine beim β -Zerfall gewonnene Rückstoßenergie von maximal 75 eV vollständig abgegeben hat, bevor es den ersten γ -Zerfall ausführt, ergibt sich weiter in guter Näherung:

$$P(v_0) = \delta(\bar{v} - v_0) \quad \text{mit} \quad \bar{v} = E_{\gamma_2} / M c.$$

Nimmt man z. B. an, daß

$$v(t) = \begin{cases} v_0, & 0 \leq t \leq T_v \\ 0, & t > T_v \end{cases}$$

und berücksichtigt, daß $T_v \ll \tau$ ist, so erhält man mit (4):

$$Z \sim \sum_v \alpha_v \cdot T_v / v_0 = \sum_v \alpha_v R_v / v_0^2. \quad (6)$$

R_v ist die in T_v durchlaufene Weglänge.

Eine Berücksichtigung der γ -Winkelkorrelation führt zu einer geringen Änderung von $N(E)$, die wir vernachlässigen.

II. Modellrechnung

Allgemeines

Wir versuchen, die Abbremsung der angeregten Kerne einer Modellrechnung zu entnehmen, die von elastischen Hart-Kugel-Stößen des angeregten Atoms mit seinen zunächst als frei angenommenen Nachbarn ausgeht. Der Vielteilchencharakter des Stoßproblems wird dadurch berücksichtigt, daß eine außerhalb des eigentlichen Stoßvorganges erfolgende Abbremsung des stoßenden Teilchens durch die Felder der Nachbaratome eingeführt wird. Ein beschleunigtes Mg-Atom erleidet in unserem Modell zusätzlich zum Energieverlust beim Stoß auch einen Energieverlust, wenn es ohne Stoß durch die Lücken zwischen den Nachbaratomen hindurchfliegt. Diese Annahmen verursachen eine leichte Modifikation von Gl. (6).

Wir haben versucht, im Bereich der nächsten und übernächsten Nachbarn des beschleunigten Atoms eine diskrete kristallähnliche Verteilung der Nachbaratome zu berücksichtigen. Weiter außen betrachteten wir eine solche Struktur zugunsten einer Verteilung gemäß der mittleren atomaren Dichte der jeweiligen Substanz als aufgelöst. Da die Rechnungen zu kompliziert wurden, faßten wir im kristallähnlichen Nahstrukturbereich wieder mehrere „Schalen“ von Atomen zusammen und nahmen eine gleichmäßige Verteilung der Stoßpartner über diese „effektiven“ Koordinationsschalen an. Zur Definition der Schalenradien sind wir von der bei Röntgen- und Neutronenstreuung gemachten Erfahrung ausgegangen, daß in regelmäßigen Abständen vom Bezugatom Maxima und Minima der radialen atomaren Dichteverteilung auftreten^{10, 11}: Wir teilten die

⁷ G. H. VINEYARD, J. B. GIBSON, A. N. GOLAND u. M. MILGRAM, Bull. Amer. Phys. Soc. 5, 26 [1960].

⁸ C. ERGINSOY, G. H. VINEYARD u. A. ENGLERT, Phys. Rev. 133 A, 595 [1964]; C. ERGINSOY, G. H. VINEYARD u. A. SHIMIZU, Phys. Rev. 139 A, 118 [1965].

⁹ B. C. DUTTA, G. HOLTMEYER u. J. KALUS, Phys. Stat. Solidi 21, 291 [1967].

¹⁰ R. R. FESSLER, ROY KAPLOW u. B. L. AVERBACH, Phys. Rev. 150 (1), 34 [1966].

¹¹ G. FOURNET, Hdb. der Physik 32, 309 [1957].

Umgebung des Ursprunges in Zonen mit Begrenzung am ungefähren Ort der erwähnten Minima der radialen Dichteverteilung ein, mittelten die vom Ursprung gezählten Abstände der in diesen Zonen bei kristallinem Aufbau liegenden Atome und erhielten eine Folge von effektiven Schalenradien, die dem in ¹⁰ gewonnenen Bilde sehr nahe kam. Wir bevölkerten die so erhaltenen zweiten und folgenden Schalen entsprechend den in den jeweiligen Zonen gemäß der mittleren atomaren Dichte der Substanz zu erwartenden Atomzahlen, beschränkten also eine wirkliche Nahordnung auf die erste dieser Schalen. Um einer Änderung dieser Nahordnung mit der Temperatur gerecht werden zu können, führten wir die Parameter der ersten Schale als Variable in die Rechnung ein (vgl. die „Domänen“ in ¹²).

Aus Anisotropiemessungen an NaCl-Kristallen ⁹ sowie aus anderen Untersuchungen ³ geht hervor, daß das Mg-Atom nach dem β -Zerfall und vor dem ersten γ -Zerfall innerhalb seiner Lebensdauer von ca. 10^{-12} s gegenüber seiner Umgebung zur Ruhe kommt und daß diese relaxiert. Für die Umgebung, in der sich ein Mg-Atom nach Verlassen seiner Ausgangsposition, also nach Emission des 2,75 MeV-Quants befindet, gilt dieser Schluß wegen der hohen Geschwindigkeit des Atoms während der Abbremszeit T , mit Sicherheit nicht mehr. Wir haben versucht, dem Rechnung zu tragen, indem wir die Radien der effektiven Koordinationsschalen, denen sich das Mg-Atom im weiteren Verlauf seines Fluges gegenübersteht, um einen empirischen Faktor reduzierten. Die Rechnung ergab aber, daß diese Reduktion für die Ergebnisse unerheblich ist.

Für die Definition der Stoßradiensumme bei den Hart-Kugel-Stößen haben wir ein Born-Mayer-Potential unter Einsetzen der von ANDERSEN, SIGMUND und VAJDA ¹³⁻¹⁵ für Zweiteilchenpotentiale berechneten Parameter herangezogen:

$$R_0(E) = 0,219 \ln \left\{ \frac{m_0 + m_1}{m_1} 52 (Z_0 Z_1)^{1/4} / E (\text{eV}) \right\} [\text{\AA}], \quad (7)$$

wo Z_0, Z_1 (m_0, m_1) die Ordnungszahlen (die Massen) der Stoßpartner bedeuten, E die Stoßenergie. $R_0(E)$ ist der minimale Abstand bei zentralem Stoß.

Das Teilchen mit dem Index 0 ist das stoßende Atom.

Bei der Untersuchung der Stoßdichte monoenergetischer Atome in einem strukturlosen Medium ¹⁶ ergab sich, daß bei kleinen Energien die Hart-Kugel-Näherung gerade für das Born-Mayer-Potential eine vernünftige Näherung bildet.

Streuwirkungsquerschnitt der Targetatome

Eine Berechnung der Streuwirkungsquerschnitte ausschließlich mit $R_0(E)$ als Hartkugelstoßradiensumme ist nur näherungsweise zu rechtfertigen, da das stoßende Atom sicherlich so lange in irgendeiner Weise beeinflusst wird, als es innerhalb eines durch die Atomradien der beteiligten Stoßpartner definierten Wirkungsbereiches fliegt. Wir haben daher den Radius des Streuwirkungsquerschnittes als Parameter r_{eff} eingeführt. Er unterscheidet sich mit hoher Wahrscheinlichkeit nur um einen Korrekturfaktor der Größenordnung 1 von $R_0(E)$. Wir rechneten mit dem Ansatz:

$$r_{\text{eff}} = ((R_{A1} + R_{A2})^\xi \cdot R_0)^{1/(1+\xi)}, \quad \xi \geq 0. \quad (8)$$

Dabei sind R_{A1}, R_{A2} die Radien der beteiligten Atome ¹⁷. Ferner wurde berücksichtigt, daß die den Raumwinkelanteil eines Targetatoms gegenüber dem Ursprung bestimmende Fläche sphärisch ist. Für die gesamten zur Streuung führenden Raumwinkelanteile einer mit K_i Nachbaratomen besetzten Schale vom Radius r_i folgt daraus

$$x_i = \frac{1}{2} K_i \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (r_{\text{eff}}/r_i)^2}} \right). \quad (9)$$

Für die Wahrscheinlichkeit, daß das im Ursprung startende Teilchen, ohne unterwegs zu stoßen, an der n -ten Schale gestreut wird, ergibt sich somit

$$x_{n, \text{eff}} = x_n \prod_{j=1}^{n-1} (1 - x_j). \quad (10)$$

Abbremsung an Potentialschwellen

Um über die Abbremsung der Mg-Atome außerhalb der harten Stöße eine Aussage zu gewinnen, verwenden wir wiederum Rechnungen von ANDERSEN und SIGMUND ^{13, 18a}: Sie berechneten die Energieübertragung ΔE eines Atoms an einen von ihm zen-

¹² ROY KAPLOW, S. L. STRONG u. B. L. AVERBACH, Phys. Rev. **138** (5), 1336 [1965].

¹³ H. H. ANDERSEN u. P. SIGMUND, Nucl. Instr. Meth. **38**, 238 [1965].

¹⁴ H. H. ANDERSEN u. P. SIGMUND, Risø Report **103** [1965].

¹⁵ P. SIGMUND u. P. VAJDA, Risø Report **84** [1964].

¹⁶ MARK T. ROBINSON, Phil. Mag. **12**, 145 [1965].

¹⁷ HERM. RÖMPP, Chemie-Lexikon, Franckh, Stuttgart 1966.

^{18a} H. H. ANDERSEN u. P. SIGMUND, Mat. fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. **34**, 15 [1966].

tral durchflogenen Ring anderer Atome (Atommasse m_1) unter Annahme einer Born-Mayer-Wechselwirkung $V_{BM} = A \cdot \exp(-r/a)$ und erhielten:

$$\Delta E = n \frac{m_0}{m_1} \frac{A^2}{E_0} \frac{\pi}{2} \frac{S}{a} \exp(-2S/a), \text{ wenn } S \gg a, \\ \Delta E \ll E_0, \Delta E \ll n A \cdot \exp(-S/a). \quad (11)$$

Dabei ist n die Zahl der Ringteilchen, m_0 die Masse des stoßenden Atoms, E_0 die Stoßenergie, S der Ringradius^{18b}.

In unserem Modell läuft dies auf die Errichtung sphärischer Potentialschwellen um den Ursprung hinaus, wobei als Ursprung auch der Ort von Hart-Kugel-Stößen des stoßenden Atoms gilt. Die Gültigkeitsbedingungen für Gl. (11) sind bei allen von uns verwendeten Metallen mit Ausnahme von Li erfüllt. Hierfür haben wir auf einen von den gleichen Autoren für den bei Li gegebenen Fall $m_0 \gg m_1$ entwickelten Näherungsausdruck zurückgegriffen:

$$\Delta E \approx n A \cdot \exp(-S/a) \frac{4 E_0/E^*}{(1+E_0/E^*)^2}, \quad (12) \\ E^* = (m_0/2 m_1) (S/a).$$

Die Parameter n und S in Gln. (11) und (12) definierten wir dadurch, daß wir die Atome einer betrachteten „Schale“ als gleichmäßig über die Schalenfläche verteilt ansahen und je drei von ihnen zu einem Ring zusammenfaßten. Diese Näherung, ebenso wie die vernachlässigte Wechselwirkung der Atome, berücksichtigen wir im Ausdruck für den Ringradius S durch einen Parameter y . Zu beachten ist ferner, daß die angeführten Rechnungen über die Änderung des Energieverlustes bei exzentrischem Durchfliegen der Ringe keine explizite Aussage gestatten. Der Faktor y enthält daher gleichzeitig die Mittelung dieser Fälle.

Soll die Theorie zu rechtfertigen sein, darf sich y nicht wesentlich von 1 unterscheiden.

Die Reduktion der Geschwindigkeit, die ein Mg-Atom der Energie E_0 beim Durchfliegen einer Koordinationsschale des Radius r und der Atombesetzungszahl K ohne harten Stoß erfährt, ergibt sich [vgl. Anhang Gl. (A.1) ff.] zu

$$\varphi \equiv v/v_0 = \sqrt{1 - y \Phi C' \exp(-2y\Phi)}, \quad \text{wo} \\ \Phi = \frac{r}{K^{1/2}} \frac{2}{3^{1/2} \cdot 0,219}, \quad (13) \\ C' = 3 \frac{\pi}{2} \frac{24}{m_1} \left(\frac{52(Z_0 Z_1)^{3/4}}{E_0(\text{eV})} \right)^2.$$

^{18b} Für die Potentialparameter erhielten diese Autoren aus ihren Experimenten die Werte $a = 0,219 \text{ \AA}$; $A = 52 \text{ eV}$ [siehe Gl. (7)].

Auf die Verfolgung individueller Schicksale mußten wir wegen der sonst zu langen Rechenzeit verzichten. Statt dessen teilten wir allen in einer bestimmten Koordinationsschale stoßenden Atomen nach dem Abbremsvorgang eine mittlere Geschwindigkeit zu (s. Anhang). Die Höhe dieses Mittels entscheidet über die weitere Resonanzfähigkeit. Für den Weiterflug nach einem zweiten und folgenden Stoßen schränkten wir die Symmetrie der Umgebung des jeweils neuen Ausgangspunktes nicht ein, nach dem ersten Stoß nur dann, wenn das gestoßene Atom schwerer war als das stoßende, d. h. wenn Rückstreuung stattfinden konnte: Das Mg-Atom fliegt dann u. U. in den Bereich seiner soeben verlassenen Position zurück, in die, wie sich aus einem Vergleich der Fluggeschwindigkeit des Mg-Atoms und den durch Wärmebewegung bedingten Geschwindigkeiten seiner Umgebung ergibt, mit ziemlicher Sicherheit zu dieser Zeit noch kein anderes Atom nachgerückt ist. Das Mg-Atom durchfliegt also eine Leerstelle, seine Weglänge ist um einen berechenbaren Faktor zu vergrößern. Eine Abschätzung ergibt, daß die Beachtung der Rückstreuung den Wert von Z höchstens um wenige Prozent verändert. Die Wege der Atome haben wir solange verfolgt, bis ihr Kern die Resonanzfähigkeit verloren hatte. Es erwies sich – das sei vorweggenommen –, daß jedes Mg-Atom spätestens an der dritten effektiven Koordinationsschale gestreut wird (Größenordnung des maximalen „freien“ Weges ca. 10 \AA) und daß es, selbst bei sehr stark von 1 abweichendem Massenverhältnis der Stoßpartner, höchstens bis zum 3. Stoß eine Geschwindigkeit $> v_{\min}$ hat. Bei allen Rechnungen haben wir vorausgesetzt, daß die atomare Konzentration des Na in der Schmelze anderer Atome genügend klein ist, um seine Berücksichtigung als möglichen Stoßpartner für die angeregten Mg-Kerne zu erübrigen.

Der mittlere Stoßabstand

Für ein Teilchen, das bereits einen ersten Stoß an der i -ten Koordinationsschale – relativ zum Ursprung – ausgeführt hat, ferner einen zweiten Stoß an der j -ten Schale – relativ zum Ort des ersten Stoßes – usw., ist die Wegstrecke zwischen $n-1$ - und n -tem Stoß definiert durch

$$\tilde{R}_n(ij\dots) = \int_0^{\vartheta_{\max}(n,ij\dots)} R(n,ij\dots) \sin \vartheta \, d\vartheta \bigg/ \int_0^{\vartheta_{\max}(n,ij\dots)} \sin \vartheta \, d\vartheta, \quad (14) \\ [\text{Anh. Gl. (A.3)}].$$

Dabei ist $R(n, i j \dots)$ die Länge einer einzelnen Flugbahn, ϑ ihr Winkel gegenüber der Richtung vom Ort des vorhergehenden Stoßes zum Mittelpunkt des Targetatoms.

Die resultierenden Teilbeträge zu L

Die zur Zählrate Z proportionale Größe L setzt sich aus den Beiträgen der aufeinanderfolgenden Flugabschnitte aller betrachteten Teilchen linear zusammen:

$$L = \sum_{\mu} L_{\mu}. \quad (15)$$

Dabei ergibt sich z. B. der Beitrag aller Kerne vor ihrem jeweils ersten Stoß, wenn man über alle möglichen Wege i summiert:

$$L_1 = \sum L_1(i); \quad (16)$$

$$L_1(i) = \begin{cases} \tilde{R}_1(i) x_{i, \text{eff}} \left(\frac{v_0}{v_1(i)} \right)^2, & v_1(i) \geq v_{\min} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$v_1(i)$ ist, wie vorher beschrieben, eine Stufenfunktion.

Für die mittlere Länge aller möglichen normierten Flugwege, die zwischen dem ersten und zweiten Stoß von einem Teilchen durchlaufen werden, das von der i -ten Schale (relativ zum ursprünglichen Ausgangspunkt) herkommt, gilt

$$L_2(i) = \sum_j L_2(i j); \quad (17)$$

$$L_2(i j) = \begin{cases} \tilde{R}_2(i j) x_{j, \text{eff}} \left(\frac{v_0}{v_2(i j)} \right)^2, & v_2(i j) \geq v_{\min} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist $x_{j, \text{eff}}$ die Wahrscheinlichkeit, daß an der j -ten Schale ein Stoß erfolgt, $v_2(i j)$ die Geschwindigkeit des Stoßatoms auf dieser Strecke.

Mit $T(i)$ als der Wahrscheinlichkeit, daß das Atom nach der ersten Streuung an der i -ten Schale resonanzfähig bleibt [s. Anhang, Gl. (A.4)], folgt für den Beitrag, den es zwischen dem ersten und dem zweiten Stoß zu L liefert:

$$L_2 = \sum_i T(i) x_{i, \text{eff}} L_2(i). \quad (18)$$

In gleicher Weise werden die Beiträge weiterer Flugabschnitte ermittelt.

Die Rechnungen wurden an der Anlage TR4 des LRZ München durchgeführt.

III. Experiment und Meßergebnisse

Meßanordnung

Abb. 2 zeigt einen Schnitt durch den Versuchsaufbau in Höhe der Quelle. Die Apparatur bestand aus beheizter Quelle, Streuer und je einem Detektor für die gestreute und die direkte Strahlung der Probe zur Bestimmung der relativen Quellstärke.

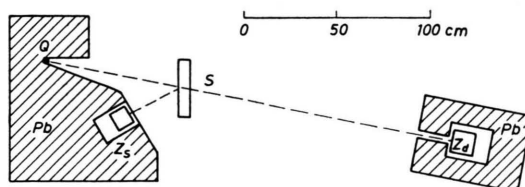


Abb. 2. Schnitt durch den Versuchsaufbau. Q: Quelle, S: Streuer, Z_s: Streuatendetektor, Z_d: Detektor für die direkte Strahlung.

Die Streuung der emittierten γ -Quanten erfolgte an einer Mg-Platte von den Ausmaßen $30 \times 20 \times 6$ cm³, ferner, im Wechsel damit zur Elimination des nicht-resonanten Untergrundes, an einer bezüglich ihrer Dicke (3,6 cm) nach den Formeln für Rayleigh- und Thomson-Streuung⁶ angepaßten Al-Platte gleicher Fläche. Als Detektoren dienten $3'' \times 3''$ -NaJ (Tl)-Kristalle.

Untersuchte Substanzen

Die Wahl der zu untersuchenden Metallschmelzen wurde nach folgenden Gesichtspunkten getroffen:

Die Schmelzpunkte dieser Stoffe sollten wesentlich unter dem Siedepunkt von Na (889 °C) liegen; die Probesubstanz durfte mit dem als Verpackung gewählten VA-Stahl nicht reagieren; bei der Bestrahlung war die Entstehung hoher γ -Aktivitäten oberhalb der zu registrierenden Linie von 1,37 MeV zu vermeiden; die ausgewählten Metalle sollten keine hohen Wirkungsquerschnitte gegenüber Neutronen zeigen.

Damit blieben im wesentlichen als Untersuchungsobjekte die Metalle

Li, Sr, Sn, Pb, Bi sowie Na selbst übrig.

Wir wählten ein atomares Verhältnis des jeweiligen Metalles zu Na²³ von mindestens 12 : 1. Eine höhere Verdünnung schien nicht erforderlich. Ergebnisse von Proben mit verschiedener Zusammensetzung haben diese Annahme bestätigt.

Bei der Dimensionierung der Proben mußten wir uns mit Rücksicht auf die Sicherheit des Bestrahlungsverfahrens im Reaktor auf die Verwendung von 1 g metallischem Na je Probe beschränken.

Für jede Probesubstanz standen mehrere unabhängig angefertigte Präparate zur Verfügung.

Zur Erzeugung von Na²⁴ wurden die Proben am Kernrand des Forschungsreaktors München bestrahlt. Die Aktivität lag in der Größenordnung von 1 C. Die Meßdauer betrug ca. 30 Stunden.

Auswertung

Die Trennung der resonanten Impulse vom Untergrund wurde durch Anpassung der mit dem Vergleichstreuer gewonnenen Kurve des Impulshöhenanalysators an das Resonanzsignal vorgenommen, die Differenz beider Kurven über einen festgelegten Energiebereich summiert.

Infolge des hohen Untergrundes liegen die statistischen Fehler der Resonanzraten in der Größenordnung von mehreren Prozent. Apparative Fehlerquellen brauchen nicht berücksichtigt zu werden. Zum Nachweis dafür ist bei der Zusammenfassung der Meßergebnisse die Schwankung der Mittelwerte der Einzelresultate errechnet und den in Tab. 1 zusammengestellten Meßergebnissen hinzugefügt worden: Sie belegt durch ihre geringfügige Abweichung von der rein statistischen Fehlerermittlung die Qualität der Messungen.

In Abb. 3 sind eine typische den Resonanzeffekt enthaltende Meßkurve sowie eine Kurve der nichtresonanten Streustrahlung dargestellt.

Meßergebnisse

Tab. 1 enthält die Resultate der Messungen. Die Temperatur der Na-Proben variierten wir, bei fester Temperatur der jeweils im Vergleich mit ihnen ausgemessenen Legierungen, während einiger Meßreihen systematisch zwischen 180° und 300 °C. Die Variation bewirkte keine Änderung der Resonanzratenverhältnisse, so daß die KRF-Ausbeute der Na-Proben als konstanter Bezugspunkt behandelt werden konnte.

IV. Diskussion

Einfluß der experimentellen Parameter auf die KRF-Ausbeute

Eine Variation des atomaren Mischungsverhältnisses der Probensubstanzen hatte im Bereich zwischen 12 : 1 und 20 : 1 keine, bei Absenkung auf 8 : 1 im Falle des Sr jedoch eine deutliche Wirkung. Die Temperaturunabhängigkeit der Meßergebnisse jeweils für Pb und Sn oberhalb einer Meßtemperatur von 670° bzw. 690 °C, für Na oberhalb 180 °C sowie für Bi oberhalb 800 °C legt die Annahme nahe, daß sich der Nahordnungsaufbau der Flüssigkeiten in den bezeichneten Temperaturbereichen stabilisiert hat. Bei Sr mußten wir wegen seines hohen Schmelzpunktes den Nachweis schuldig bleiben, bei Li stieg die Zählrate mit der Temperatur noch weit oberhalb seines Schmelzpunktes an. Dieser Anstieg ist Gegenstand besonderer Untersuchungen¹⁹. Aus

¹⁹ J. KALUS u. M. SHUKAT, Forschungsreaktor München, persönliche Mitteilung.

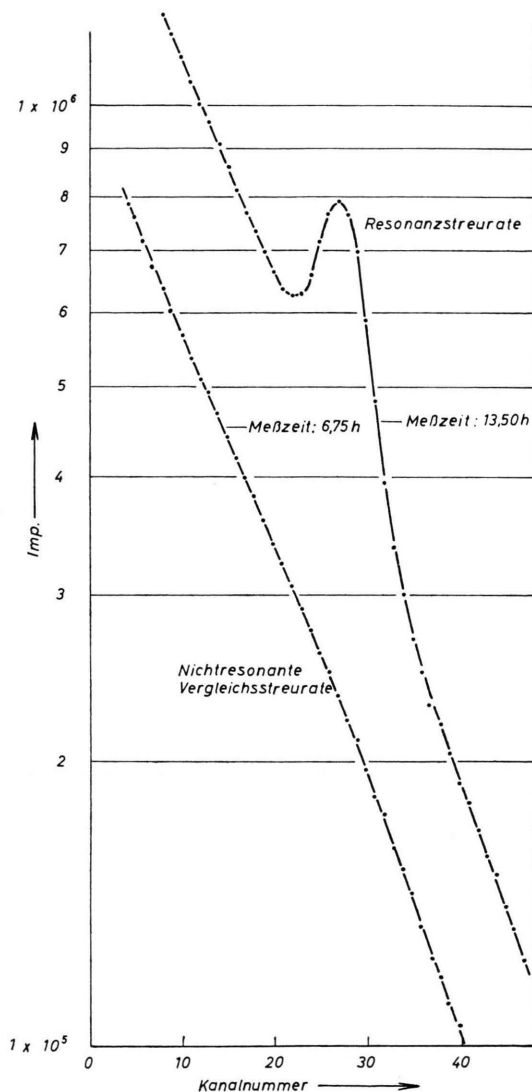


Abb. 3. Impulshöhenspektrum einer Meßreihe mit NaPb_x als Funktion der Kanalnummer des Vielkanaldiskriminators; $T=857^{\circ}\text{C}$, $V=20$.

dem Phasendiagramm ist zu entnehmen, daß hier bei den verwendeten Mischungsverhältnissen zwei Schmelzen vorliegen.

Bei den Resonanzratenverhältnissen fällt das des relativ schweren Metalles Sn durch seinen geringen Wert auf. Die Mg-Atome in flüssigem Sn erleiden eine noch stärkere Abbremsung als im Falle des reinen Na, bei dem die Stoßpartner ungefähr gleiche Masse haben. Dies Verhalten läßt sich damit deuten, daß (im Gegensatz zu den Schwermetallen Pb und Bi) hier bereits ein Teil der Mg-Atome nach dem ersten Stoß aus dem resonanzfähigen Bereich

Proben- metall X	Schmelz- punkt °C	Atomares Verhältnis $V = n(X)/n(\text{Na})$ $\pm 0,5$	Meß- temperatur T °C	Streuraten- verhältnis $Z_r = Z(X)/Z(\text{Na})$	Anmerkungen
Li	180	19,0	320	$1,009 \pm 0,020$	Im Falle mangelnder Unterscheidbarkeit der Z_r für versch. V , T ergibt weitere Zusammenfassung: Für $12,0 \leq V \leq 16,0$; $T = 385^\circ\text{C}$: $\bar{Z}_r = 1,077 \pm 0,022$ (0,015) *
		12,0	385	$1,090 \pm 0,053$	
		16,0	385	$1,074 \pm 0,024$	
Sr	785	8,0	810	$1,301 \pm 0,037$	Für $12,0 \leq V \leq 15,5$; $T = 810^\circ\text{C}$: $\bar{Z}_r = 1,416 \pm 0,014$ (0,019)
		12,0	810	$1,430 \pm 0,021$	
		15,5	810	$1,403 \pm 0,019$	
Sn	232	20,0	693	$0,831 \pm 0,026$	Für $V = 20,0$; $693^\circ \leq T \leq 858^\circ\text{C}$: $\bar{Z}_r = 0,848 \pm 0,011$ (0,010)
		20,0	810	$0,830 \pm 0,018$	
		20,0	858	$0,865 \pm 0,015$	
Pb	327	15,0	693	$1,326 \pm 0,026$	Für $15,0 \leq V \leq 20,0$; $670^\circ \leq T \leq 857^\circ\text{C}$: $\bar{Z}_r = 1,335 \pm 0,015$ (0,005)
		15,0	857	$1,341 \pm 0,023$	
		20,0	670	$1,350 \pm 0,056$	
		20,0	690	$1,326 \pm 0,045$	
Bi	271	19,5	20	$0,854 \pm 0,022$	Für $V = 19,5$; $810^\circ \leq T \leq 857^\circ\text{C}$: $\bar{Z}_r = 1,345 \pm 0,012$ (0,005)
		19,5	810	$1,337 \pm 0,039$	
		19,5	857	$1,346 \pm 0,013$	

* In Klammern: Mittl. Schwankung der Mittelwerte von Z_r .

Tab. 1. Ergebnisse der KRF-Messungen.

ausscheidet und zusätzlich (nunmehr im Gegensatz zu den Leichtmetallen) die noch resonanzfähigen Kerne infolge der hohen mittleren atomaren Dichte des Sn (s. Tab. 2) eine besonders starke Abbremsung an den Potentialschwellen einer Sn-Umgebung erfahren.

Einschränkung der freien Modellparameter

In den Abb. 4 und 5 haben wir, stellvertretend für alle Kombinationen unserer Parameter, die Ergebnisse \bar{L} der Rechnungen für extreme Werte der Parameter ξ und $K_{1,\text{eff}}$ (der Besetzungszahl der ersten Koordinationsschale, s. Tab. 2) in Abhängigkeit von y aufgezeichnet. Zwischen $K_{1,\text{eff}}$ und $r_{1,\text{eff}}$ besteht ein nahezu linearer Zusammenhang, der durch unser Mittelungsverfahren bedingt ist. Der

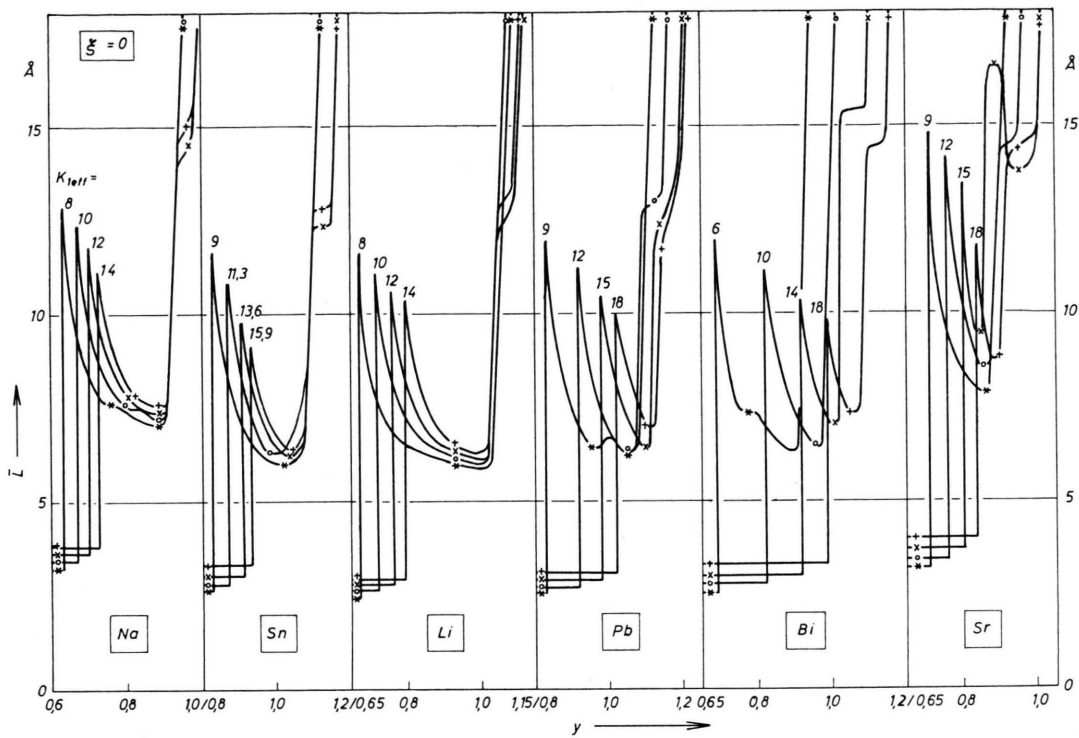
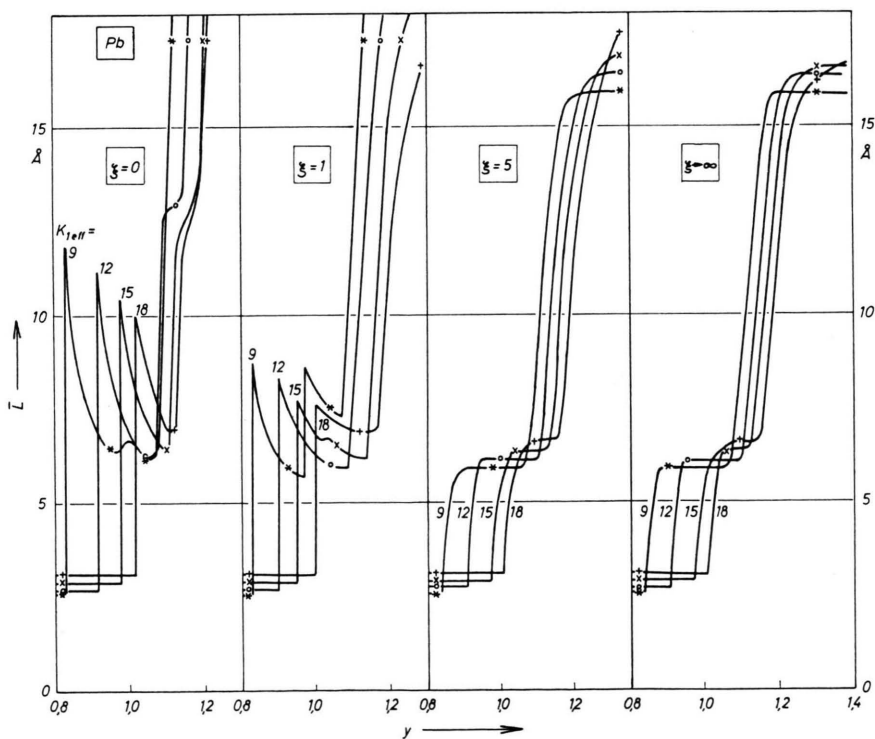
Bereich von y ist dadurch bestimmt, daß, je nach Substanz der Probe, Werte unterhalb $y = 0,7 \dots 0,9$ einen völligen Geschwindigkeitsverlust des Mg-Atoms an der Potentialschwelle der nächsten Nachbarn ergeben, während eine Wahl von y oberhalb eines wiederum substanzabhängigen Bereiches $y = 1,1 \dots 1,3$ zu unsinnig hohen Werten für die Anzahl der Stöße führen würde, die ein Mg-Atom, selbst in einer Na-Umgebung, ausführen müßte, um seine Geschwindigkeit von v_0 auf v_{\min} zu verringern.

Deutung des Verlaufes der Funktion $\bar{L}(y)$

Nach niedrigen y hin bricht die Aufzeichnung dort ab, wo eine völlige Abbremsung der Mg-Atome bereits bei Durchfliegen der ersten Schale nächster Nachbarn eintritt. Der hier mit $\bar{L}(y)$ identische mitt-

Element	1. Schale		mittlere Temperatur T °C	mittlere Atomdichte $\text{At./}\text{\AA}^3$	2. Schale		3. Schale	
	Variationsbereich $r_{1,\text{eff}}$ Å	$K_{1,\text{eff}}$			$r_{2,\text{eff}}$ Å	$K_{2,\text{eff}}$	$r_{3,\text{eff}}$ Å	$K_{3,\text{eff}}$
Li	3,10–3,50	8–14	365	0,0436	6,13	70,0	9,09	156,0
Na	3,60–4,21	8–14	220	0,0244	7,45	69,1	11,08	154,1
Sr	3,70–4,52	9–18	810	0,0163	8,17	59,4	12,21	132,2
Sn	3,15–3,86	9–16	770	0,0350	6,48	57,7	9,78	128,8
Pb	3,20–3,72	9–18	770	0,0310	6,65	60,3	9,94	134,2
Bi	3,20–4,14	6–18	830	0,0272	7,31	51,1	11,29	114,0

Tab. 2. Radien und Besetzung der effektiven Koordinationsschalen.

Abb. 4. $\bar{L}(y, K_{1, \text{eff}}(r_{1, \text{eff}}), \xi=0)$.Abb. 5. $\bar{L}_{\text{Pb}}(y, K_{1, \text{eff}}(r_{1, \text{eff}}), \xi)$.

lere Flugweg L_1 vom Ursprung zur ersten Schale beträgt je nach Probensubstanz $2,5 \dots 4 \text{ \AA}$. Die Unterschiede in L_1 für verschiedene $K_{1, \text{eff}}$ sind deutlich ausgeprägt. $L(y)$ steigt, wenn infolge schwächerer Bremsfähigkeit der Potentialschwelle mit zunehmendem y die nach ihrem Durchfliegen verbleibende Geschwindigkeit des Mg-Atoms $> v_{\text{min}}$ wird. Dabei ist zu beachten, daß ein Kern, der mit einer Geschwindigkeit nahe v_{min} fliegt, eine längere Flugzeit bis zum Eintreten einer weiteren Reaktion mit seiner Umgebung braucht und damit mehr zu L beiträgt als ein Kern, der zwar eine höhere Geschwindigkeit besitzt, aber nicht schnell genug ist, um nach einer weiteren Reaktion noch resonanzfähig zu bleiben. Nach dem stufenartigen Anstieg sinkt $L(y)$ daher zunächst wieder ab, bis die Abbremsung so gering wird, daß die Resonanzfähigkeit des Kernes auch nach Überwinden einer weiteren Potentialschwelle erhalten bleibt usw. Entsprechendes ergibt sich, wenn man zu der Abbremsung an einer Potentialschwelle den harten Stoß der Mg-Atome mit einem einzelnen Targetatom hinzunimmt. Da die Möglichkeiten für die Zusammensetzung einer bestimmten Reaktionsfolge und damit eines bestimmten $L(y)$ mit steigendem y immer vielfältiger werden, verwischt sich die Stufenform von $L(y)$ mit zunehmendem y merklich.

Vergleich mit der Verlagerungsenergie

Wir können die für die Abbremsung an den Potentialschwellen maßgebende Energie mit der zur Verlagerung eines Kristallatoms erforderlichen Energie, der „Verglagerungsenergie“ E_d , vergleichen. Diese Energie ist allerdings bisher nur für wenige Elemente und auch dort nur in ziemlich weiten Grenzen bekannt: Je nach der Kristallrichtung kann sie sehr verschiedene Werte annehmen^{7, 8}. Die experimentelle Bestimmung mit Hilfe der Widerstandsmessung bei Elektronenbeschuß eines Metalls ist bei²⁰ beschrieben. Bei Extrapolation bekannter Werte auf andere Stoffe ist das Maß der „Offenheit“ des entsprechenden Gitters von Ionenrümpfen zu beachten²¹. Diese Offenheit ist z. B. für die Alkalimetalle mit ihren im Vergleich zur Gitterkonstanten kleinen Ionenradien besonders ausgeprägt, so daß sich für sie Werte von E_d wesentlich unter de-

nen für Schwermetalle erwarten lassen. Nimmt man ferner an, daß zur Verlagerung eines Atoms in einer Flüssigkeit wegen Auftretens von Leerstellen im statistischen Wechselspiel eine etwas geringere Energie benötigt wird als im Festkörper, dann ist der Bereich für die hier maßgebenden Energien nach²⁰ etwa durch die Werte $15 \dots 35 \text{ eV}$ für die schwereren Metalle abgesteckt. Für Li und Na läßt sich E_d im Bereich $10 \dots 20 \text{ eV}$ erwarten.

Strukturuntersuchungen über die Funktion $\Delta E(L_{\text{Na}}, \xi, K_{1, \text{eff}})$

Das zweite Glied unter der Wurzel von Gl. (13) ist mit dem mittleren Energieverlust $\Delta E(y, K_{1, \text{eff}})$ eines Teilchens bei Durchfliegen der Schale nächster Nachbarn verknüpft. Gelingt es (bei einer bestimmten Wahl der Parameter L_{Na}, ξ), für alle Substanzen die Größenordnung des jeweiligen mittleren Energieverlustes ΔE für mögliche $K_{1, \text{eff}}$ in Übereinstimmung zu bringen mit den angegebenen Bereichen von E_d , dann lassen sich daraus bereits Schlüsse auf die Struktur der Metalle ziehen. Die untere und obere Begrenzung in der Wahl der L_{Na} erfolgte durch Vergleich mit entsprechenden Ergebnissen anderer Autoren: Einerseits wird ein Teilchen in massegleicher Umgebung bereits durch einen harten Stoß unter Resonanzfähigkeit abgebremst^{7, 8}, andererseits liegen die mittleren Flugwege für solche Teilchen unter vergleichbaren Umständen kaum unter 8 \AA ²²⁻²⁴. Die Annahme von ΔE in diesem Bereich genügt wegen der Anfangsenergie von 168 eV vollauf der Bedingung $\Delta E \ll E_0$, unter der das Modell der Abbremsung hergeleitet wurde. Eine zusammenfassende Darstellung der Funktion

$$\Delta E(L_{\text{Na}}, \xi, K_{1, \text{eff}})$$

ist in Abb. 6 gegeben. Die Annäherung des Bereiches der ΔE an den von E_d ist unter gleichzeitiger Betrachtung aller Legierungsmetalle am größten, wenn ξ gegen 0 geht. Diese praktisch reine Abhängigkeit des Stoßwirkungsquerschnittes der Targetatome von der Stoßradiensumme $R_0(E)$ entspricht erfolgreichen Annahmen anderer Autoren^{23, 24}. Gleichzeitig wird die Kongruenz von ΔE und E_d für die Mehrzahl der Legierungen gefördert durch die Wahl eines L_{Na} im Bereich $8 \dots 10 \text{ \AA}$. Auch hier be-

²⁰ A. C. DAMASK u. G. J. DIENES, Point Defects in Metals, Gordon & Breach, New York 1963.

²¹ H. WENZL, Habilitationsschrift, München 1966.

²² M. OTT, Diplomarbeit, Technische Hochschule München 1966.

²³ J. NEUHAUSER, Diplomarbeit, München 1966.

²⁴ J. THALER, Diplomarbeit, München 1967.

finden wir uns in Übereinstimmung mit Ergebnissen vergleichbarer Art der genannten Autoren^{23, 24}. Wie erwartet, bleibt ΔE für Li und Na durchweg stark unter dem nach der bisherigen Erfahrung abgesteckten Bereich von E_d .

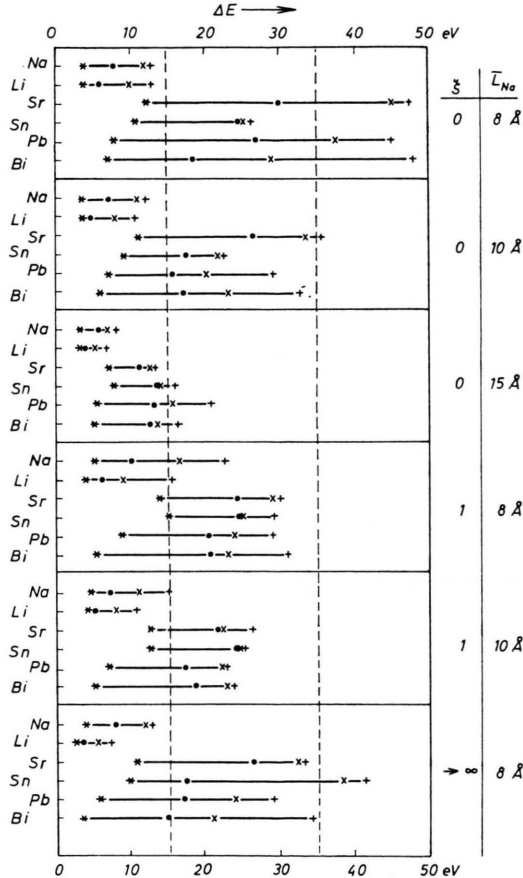


Abb. 6. $\Delta E(K_{1, \text{eff}})$, $\xi = \text{const}$, $\bar{L}_{Na} = \text{const}$. Energieverlust des Mg-Atoms an der ersten Potentialschwelle in den verschiedenen Legierungen; Darstellung für eine Auswahl von Werten für die Parameter ξ und \bar{L}_{Na} . Zu $K_{1, \text{eff}}$ vgl. Abb. 5.

Die Größe des Bereiches der möglichen E_d zwingt uns allerdings, eine Aussage über die im gegebenen Flüssigkeitszustand vorliegenden effektiven Koordinationszahlen zurückzustellen, bis die Verlagerungsenergien für die betrachteten Metalle im einzelnen hinreichend bekannt sind. Dann kann unser Verfahren ein geeignetes Mittel darstellen, um Strukturänderungen im Nahbereich von Elementen bei Phasenübergängen zu untersuchen sowie den Aufbau von Mischungen in kondensierten Phasen und Vorgänge der Entmischung zu studieren.

Unser aufrichtiger Dank gilt Herrn Prof. Dr. H. MAIER-LEIBNITZ und Herrn Priv.-Doz. Dr. H. VONACH, sowohl für die Ermöglichung der Experimente am Forschungsreaktor München wie auch für förderndes Interesse. Ebenso danken wir der Leitung und der Bestrahlungsgruppe des Forschungsreaktors.

Anhang

Zur Geschwindigkeitsreduktion an Potentialschwellen:

$$v/v_0 = (1 - \Delta E/E_0)^{1/2} \quad (\text{A.1})$$

ΔE folgt aus Gl. (11) bzw. (12).

Der Zusammenfassung von je 3 Atomen zu einem Ring entspricht dabei $n=3$, für den Ringradius ergibt sich näherungsweise $S = 2r \cdot (3K)^{-1/2}$, wo r den Schalenradius, K die zugehörige Koordinationszahl bedeutet.

Zum mittleren Stoßabstand:

$$R = d \cos \vartheta - (R_0^2 - d^2 \sin^2 \vartheta)^{1/2}, \quad R_0 = R_0(E); \quad (\text{A.2})$$

(d = Schwerpunktsabstand der Stoßpartner)

$$\tilde{R}_n(ij \dots) = \left(\frac{(d - R_0)^{1/2} (d + R_0) \ln((d + R_0)/(d - R_0)) - R_0}{2(d - (d^2 - R_0^2)^{1/2})} \right)_{n, ij \dots} \quad (\text{A.3})$$

(s. Anm. 25).

Zur Erhaltung der Resonanzfähigkeit nach einem Stoß:

Nur für Streuung oberhalb eines Grenzwinkels $\vartheta_{\min}(v_{\min}/v, m_1, m_0, d, R_0)$ behält das stoßende Mg-Atom eine Geschwindigkeit $v' \geq v_{\min}$, die ihm die Emission eines resonanzfähigen Quants gestattet. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Teilchen beim Stoß seine Resonanzfähigkeit behält, ist demnach gegeben durch

$$T = \frac{\int_{\vartheta_{\min}}^{\vartheta_{\max}} \sin \vartheta \, d\vartheta}{\int_0^{\vartheta_{\max}} \sin \vartheta \, d\vartheta} \quad (\text{A.4})$$

[ϑ ist nach Gl. (14) definiert].

Entsprechend ergibt sich die diesem resonanzfähigen Teilchen im Mittel verbleibende Geschwindigkeit zu

$$\hat{v} = \frac{\int_{\vartheta_{\min}}^{\vartheta_{\max}} v \sin \vartheta \, d\vartheta}{\int_{\vartheta_{\min}}^{\vartheta_{\max}} \sin \vartheta \, d\vartheta}. \quad (\text{A.5})$$

Da wir angenommen haben, daß jedes Teilchen nach einem harten Stoß einen zusätzlichen Energieverlust

²⁵ G. HOLTMEYER u. J. KALUS, Phys. Status Solidi **21**, 297 [1967].

durch die Felder benachbarter Atome erleidet, folgt für die resultierende mittlere Geschwindigkeit eines Teilchens nach einem Stoß: $\hat{v}_{\text{red}} = \hat{v} \cdot \varphi$.

Aus den Gesetzen des elastischen Stoßes für Kugeln der Massen m_0, m_1 ergibt sich für die Geschwindigkeit von m_0 nach dem Stoß mit

$$\beta = ((m_1 - m_0)/(m_1 + m_0))^2, \quad \varepsilon = (1/\beta - 1)(d/R_0)^2: \\ v' = v_0(\beta \varepsilon)^{1/2}((1 + 1/\varepsilon) - \cos^2 \vartheta)^{1/2}; \quad (\text{A.6})$$

weiterhin ist:

$$\cos \vartheta_{\min} = (1 - (R_0/d)^2(\beta - (v_{\min}/v_0)^2)/(\beta - 1))^{1/2}, \\ \cos \vartheta_{\max} = (1 - (R_0/d)^2)^{1/2}.$$

$$\hat{v} = \frac{1}{2} v_0 (\beta \varepsilon)^{1/2} (1 + 1/\varepsilon) \frac{U(\varepsilon, \cos \vartheta_{\max}) - U(\varepsilon, \cos \vartheta_{\min})}{\cos \vartheta_{\max} - \cos \vartheta_{\min}}, \quad (\text{A.7})$$

wo

$$U(\varepsilon, \cos \vartheta) \equiv (X(1 - X))^{1/2} + \arctan(X/(1 - X))^{1/2}, \\ X \equiv \cos^2 \vartheta / (1 + 1/\varepsilon).$$

On the Least Stable Mode in Cylindrical Systems

J. G. KRÜGER and D. K. CALLEBAUT *

Physical Institute, University of Ghent, Belgium

(Z. Naturforsch. **23 a**, 1357—1361 [1968]; received 18 May 1968)

The stability of a magnetodynamic equilibrium system for perturbations ξ depending on a parameter α is investigated. Growth rates are compared (rather than only the second order energy variations) without calculating them explicitly. The explicit dependence on α as well as the implicit dependence on α through ξ is taken into account.

It is well known in magnetodynamics that a system is unstable or stable if the change in potential energy $\delta W(\xi, \xi)$ can or cannot be made negative¹. Consider a displacement ξ depending on a parameter α [α may be m^2 or k^2 of Eq. (1), e. g.], which for $\alpha = \alpha_1$, makes $\delta W(\xi, \xi)$ more negative than another displacement with $\alpha = \alpha_2$. In this case it often happens in the literature that the displacement with $\alpha = \alpha_1$ is called less stable or more dangerous than the one with $\alpha = \alpha_2$. In many cases this is not true at all. The expression *more or less stable* can only be used in a consistent way by comparing growth rates. Indeed, denoting the kinetic energy of the system for the perturbation ξ by $K(\xi, \xi)$, we have $\omega^2(\xi, \xi) = \delta W(\xi, \xi)/K(\xi, \xi)$ where $K(\xi, \xi)$ is a function of α too; hence it is impossible to decide which displacement is the least stable from δW alone, or from a partly minimized δW , as is often done.

Another difficulty is that $\omega^2(\xi, \xi)$ is implicitly dependent on α through the eigenmode ξ for which $\omega^2(\xi, \xi)$ is minimized by variation of ξ (α kept fixed).

Since we may expect that the fastest growing mode will usually dominate in nature, it seems worthwhile to point out what can be asserted about

the growth rates by simple arguments and without going into the solution of the eigenmode equations. This is done in the following sections for systems with rotational and cylindrical symmetry.

In section 1 the explicit dependence of $\omega^2(\xi, \xi)$ on α will be examined. The influence of the implicit dependence on α will be treated in section 2. The conclusions concerning the stability will be discussed in section 3.

1. Explicit Dependence of $\omega^2(\xi, \xi)$ on α

Consider the magnetodynamic stability of an equilibrium system with cylindrical and rotational symmetry (neither ϑ nor z dependence). A cylindrical ideally conducting plasma of density $\rho(r)$ and pressure $p(r)$, is pervaded by a magnetic field $[0, B_\vartheta(r), B_z(r)]$ and a current $[0, j_\vartheta(r), j_z(r)]$. It is acted on by an external gravitational field $[-d\varphi/dr, 0, 0]$ which e. g. may simulate an acceleration. Normal mode solutions are of the form (cylindrical coordinates)

$$\xi_n(r; m, k) \exp\{i(m\vartheta + kz + \omega t)\} + \text{c. c.} \quad (1)$$

The eigenmode equation reduces to the two equations in r only:

$$-\rho \omega_n^2 \xi_n = F(\xi_n), \quad -\rho \omega_n^2 \xi_n^* = F^*(\xi_n^*). \quad (2)$$

* Research Worker at the Inter-University Institute for Nuclear Sciences, Belgium.

¹ I. B. BERNSTEIN, E. A. FRIEMAN, M. D. KRUSKAL, and R. M. KULSRUD, Proc. Roy. Soc. London **244**, 17 [1958].